3 coll

المعادلات والمتراجحات

I. المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد :

تعريف

- ✓ كل عبارة رياضية تحتوي على رمز = تسمى متساوية .
- ✓ كل متساوية على شكل $ax + b = 0$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد هو x .

ملاحظة :

❖ حل المعادلة هو البحث عن جميع قيم x إن وجدت .

الحالة 1 : معادلات من نوع $ax + b = c$

حـل المعـــــــــــــــادلات التالية :

لدينا $-3x + 4 = 0$

يعني أن $-3x = -4$

إذن $x = \frac{-4}{-3}$

ومنه $x = \frac{4}{3}$

وبالتالي المعادلة تقبل حل وحيد هو $\frac{4}{3}$

لدينا $3(2x - 1) = 6x + 7$

$6x - 3 = 6x + 7$

$6x - 6x = 7 + 3$

$0x = 10$

وهذا غير ممكن لأن $0 \neq 10$

وبالتالي المعادلة لا تقبل حل .

لدينا $5(x + 1) = 2x - 1$

$5x + 5 = 2x - 1$

$5x - 2x = -1 - 5$

$3x = -6$

$x = \frac{-6}{3}$

وبالتالي المعادلة تقبل حل وحيد هو $x = -2$

لدينا $2x + 5 = 2(x + 1) + 3$

$2x + 5 = 2x + 2 + 3$

$2x - 2x = 5 - 5$

$0x = 0$

إذن مهما كان x فإن : $0 = 0$

وبالتالي جميع الأعداد الحقيقية حلول لهذه المعادلة

www.hsaina.com

الحالة 2 : معادلات من نوع $(ax + b)(cx + d) = 0$

خاصية

a و b عددان حقيقيان : $a \times b = 0$ يعني $a = 0$ أو $b = 0$

حـل المعـــــــــــــــادلتين التاليتين :

لدينا $(x + 1)(2x - 3) = 0$

تكافئ $x + 1 = 0$ أو $2x - 3 = 0$

إذن $x = -1$ أو $x = \frac{3}{2}$

وبالتالي المعادلة تقبل حلين هما -1 و $\frac{3}{2}$

لدينا $x^2 - 7x = 0$

يعني أن $x(x - 7) = 0$

المعادلة تكافئ $x = 0$ أو $x - 7 = 0$

إذن $x = 0$ أو $x = 7$

وبالتالي المعادلة تقبل حلين هما 0 و 7

الحالة 3 : معادلات تحتوي على كســــــــــــور

ملاحظة : عموماً لحل هذا النوع من المعادلات نوحد المقام .

حل المعـــــادلة : $\frac{2x+1}{5} = \frac{x-1}{3}$

$3 \times (2x+1) = 5 \times (x-1)$

$6x + 3 = 5x - 5$

$6x - 5x = -5 - 3$

$x = -8$

إذن المعادلة تقبل حل وحيد هو -8

حل المعـــــادلة : $\frac{2x+1}{5} - 2 = \frac{x-1}{3}$

$\frac{2x+1}{5} - \frac{2}{1} = \frac{x-1}{3}$

$\frac{3\times(2x+1)}{15} - \frac{15\times2}{15} = \frac{5\times(x-1)}{15}$

$6x + 3 - 30 = 5x - 5$

$6x - 5x = -5 - 3 + 30$

$x = 22$

إذن المعادلة تقبل حل وحيد هو 22

الحالة 4 : معادلات من نوع $x^2 = a$

ملاحظة : لحل هذا النوع من المعادلات تذكر المتطابقة $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

خاصية

إذا كان $a = 0$ المعادلة تقبل حلاً وحيداً هو $x = 0$

إذا كان $a > 0$ المعادلة تقبل حلين هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$

إذا كان $a < 0$ المعادلة لا تقبل حل .

حل المعـــــادلة : $x^2 + 12 = 2$

$x^2 = 2 - 12$

$x^2 = -10$

إذن المعادلة لا تقبل حل لأن x^2 يكون دائماً موجباً أو منعدماً $x^2 \geq 0$

حل المعـــــادلة : $(2x-1)^2 - 9 = 0$

$(2x-1)^2 - 3^2 = 0$

$(2x-1+3)(2x-1-3) = 0$

$(2x+2)(2x-4) = 0$

$2x + 2 = 0$ أو $2x - 4 = 0$

$x = \frac{-2}{2}$ أو $x = \frac{4}{2}$

$x = -1$ أو $x = 2$

وبالتالي المعادلة تقبل حلين هما 2 و -1

الحالة 5 : حل معادلة بالتعميل إذا ماوجد عامل مشترك

حل المعادلة : $2x(x+\sqrt{2}) - \sqrt{3}(x+\sqrt{2}) = 0$

$(x+\sqrt{2})(2x-\sqrt{3}) = 0$

$x + \sqrt{2} = 0$ أو $2x - \sqrt{3} = 0$

$x = -\sqrt{2}$ أو $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

حل المعادلة: $7(x+2)^2 = (x+2)(x-1)$

$(x+2)\big(7(x+2)\big) - (x-1) = 0$

$(x+2)(7x+14-x+1) = 0$

$(x+2)(6x+15) = 0$

$x = -2$ أو $x = \frac{-15}{6}$

إذن المعادلة تقبل حلين هما -2 و $\frac{-15}{6}$

الحالة 6 : حل معادلة بالنشر إذا لم يوجد عامل مشترك

حل المعادلة : $x(x+3)=x^2-15$

$x^2+3x=x^2-15$

$x^2-x^2+3x=-15$

$x=\frac{-15}{3}$

$x=-5$

إذن المعادلة تقبل حل وحيد هو -5

حل : $-4(2x+1)+x=2(-x+5)$

$-8x-4+x=-2x+10$

$-8x+x+2x=10+4$

$-5x=14$

$x=\frac{14}{-5}=-\frac{14}{5}$

إذن المعادلة تقبل حل وحيد هو $-\frac{14}{5}$

المســـــألة المرتبطة بالمعادلة :

لحل مسألة نتبع الخطوات التالية :

1) قراءة المسألة بتمعن وتأكد أن المعطيات كافية وفي علاقة في ما بينهم مثل (أحدهم يمثل الضعف- النصف- الربع- السدس – نفس - يزيد عن – ينقص عن.....) بالنسبة للمعطى الأخر.
2) اختيار المجهول x من السؤال المطروح .
3) استغلال معطيات نص المسالة وصياغة معادلة .
4) حل المعادلة .
5) التحقق من منطقية الحل .

www.hsaina.com

يصرف أستاذ نصف أجرته في الكراء والمأكل والمشرب ، وثلثها يرسله إلى أمه وسبعها في اللباس والتنقل ويوفر بأعجوبة $150\ dh$. فما هي أجرتـــــه الشهرية ؟

اختيار المجهول : ليكن x أجرة هذا الأستاذ الشهرية .

صياغة المعادلة :

- ✓ بما أن نصف الأجرة يصرفه في الكراء والمأكل والمشرب هذا يمثل $\frac{x}{2}$
- ✓ والثلث يرسله إلى أمه هذا يمثل $\frac{x}{3}$
- ✓ والسبع يصرفه في اللباس والتنقل هذا يمثل $\frac{x}{7}$
- ✓ ويوفر $150\ dh$.

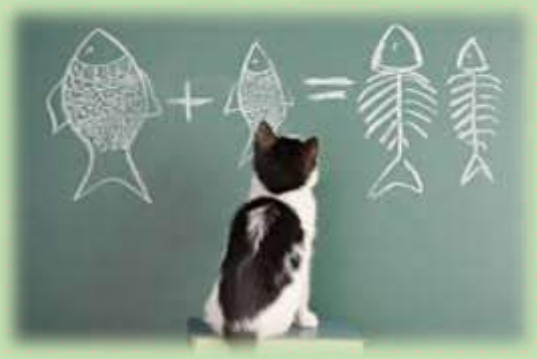
إذن مجموع المصاريف زائد ما يوفر يساوي أجرته الشهرية .

إذن المعادلة هي : $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{7}+150=x$

حل المعادلة : المعادلة تكافئ $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{7}+\frac{150}{1}=\frac{x}{1}$

$$\frac{21\times x}{21\times 2}+\frac{14\times x}{14\times 3}+\frac{6\times x}{6\times 7}+\frac{42\times 150}{42\times 1}=\frac{42\times x}{42\times 1}$$

$$\frac{21x}{42}+\frac{14x}{42}+\frac{6x}{42}+\frac{6300}{42}=\frac{42x}{42}$$



$$21x+14x+6x+6300=42x$$

$$41x+6300=42x$$

$$41x-42x=-6300$$

$$-x=-6300$$

$$x=6300$$

الرجوع إلى المسألة والتحقق من الحل : إذا كان $x=6300$ فإن :

$$\frac{6300}{2}+\frac{6300}{3}+\frac{6300}{7}+150=3150+2100+900+150=6300$$

وبالتالي أجرة هذا الأستاذ الشهرية هي $6300\ dh$

مســـــألة : الإمتحان الجهوي لجهة مكناس-تافيلالت دورة يونيو 2014 .

حدد عدد تلاميذ ثانوية إعدادية إذا علمت أن نصفهم يدرسون بمستوى الأولى الأعدادي ، وربعهم بمستوى الثانية و70 تلميذاً يدرسون بمستوى الثالثة إعدادي .

www.hsina.com

II. المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد :

تعريف

- ✓ المتراجحة أو المتباينة هي جملة رياضية تضم $>$; $\geq$; $<$; $\leq$; $\neq$.
- ✓ المتراجحة $ax+b>0$ تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد .

ملاحظة :

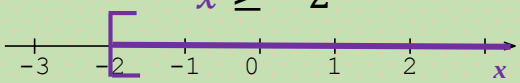
❖ حل المتراجحة هو أي قيمة ل x تجعل المتراجحة صحيحة .

على سبيل المثال : -2 و -1 و 0 و 1 و $70\,000$ هي حلول للمتراجحة $x\geq -2$

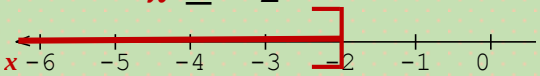
على سبيل المثال : -1 و 0 و 1 و $70\,000$ هي حلول للمتراجحة $x>-2$

تمثيل حلول متراجحة على مستقيم مدرج :

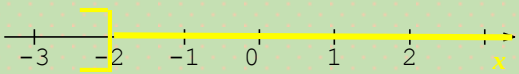
$x\geq -2$



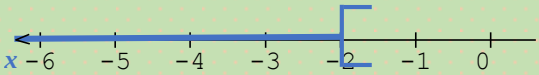
$x\leq -2$



$x>-2$



$x<-2$



الحالة 1 : إذا كان $a > 0$ فإن حلول المتراجحة $ax + b < 0$ هي $x < \frac{-b}{a}$

حل المتراجحة : $4x - 5 \leq 2x + 3$

$4x - 2x \leq 3 + 5$

$2x \leq 8$

$x \leq \frac{8}{2}$

$x \leq 4$

إذن حلول المتراجحة هي مجموعة الأعداد الأكبر أو تساوي 4

حل المتراجحة : $3(x - 1) > x + 5$

$3x - 3 > x + 5$

$3x - x > 5 + 3$

$2x > 8$

$x > 4$

إذن حلول المتراجحة هي مجموعة الأعداد الأكبر قطعاً من 4

الحالة 2 : إذا كان $a < 0$ فإن حلول المتراجحة $ax + b < 0$ هي $x > \frac{-b}{a}$ نقلب الرمز

حل المتراجحة : $2x - 6 \geq 7x - 1$

$2x - 7x \geq -1 + 6$

$-5x \geq 5$

$x \leq \frac{5}{-5}$ نزل 5 – وأقلب الرمز

$x \leq -1$

إذن حلول المتراجحة هي مجموعة الأعداد الأصغر أو تساوي -1

حل المتراجحة : $\frac{x}{-3} > 2$

$-3 \times \frac{x}{-3} < -3 \times 2$

$x < -6$

إذن حلول المتراجحة هي مجموعة الأعداد الأصغر قطعاً من -6

حل المتراجحة : $\frac{x}{2} + \frac{3-4x}{3} > 1$

$\frac{3x}{6} + \frac{2(3-4x)}{6} > \frac{6}{6}$ نوحد المقام

$3x + 6 - 4x > 6$

$3x - 4x > 6 - 6$

$-x > 0$ بما أن

$x < 0$ فإن

إذن الحلول المتراجحة هي مجموعة الأعداد الأصغر قطعاً من 0

الحالة 3 : متراجحات لاتقبل حل

حل المتراجحة : $\frac{2x-5}{3} - \frac{x+1}{2} \geq \frac{x}{6}$

$\frac{2(2x-5)}{6} - \frac{3(x+1)}{6} \geq \frac{x}{6}$

$\frac{4x-10-3x-3}{6} \geq \frac{x}{6}$

$4x - 3x - x \geq 10 + 3$

$0x \geq 13$ وهذا غير ممكن لأن $0 \leq 13$

إذن المتراجحة ليس لها حل

الحالة 4 : متراجحات لها ما لانهاية من الحلول

حل المتراجحة : $5(2x - 1) - 7x < 3(x + 1)$

$10x - 5 - 7x < 3x + 3$

$10x - 7x - 3x < 3 + 5$

$0x < 8$

وهذا ممكن لأن مهما كان x فإن $0 < 8$

إذن المتراجحة لها ما لا نهاية من الحلول .

www.hsaba.com

المســـــألة المرتبطة بالمتراجحة :

ممون الحفلات يقترح الصيغتين التاليتين لكراء الأواني :

الصيغة الأولى : $100dh$ إضافة إلى $30dh$ للساعة الواحدة .

الصيغة الثانية : $200dh$ إضافة إلى $20dh$ للساعة الواحدة .

1) تريد استغلال الأواني لمدة 6 ساعات أي الصيغتين تختار ؟
2) حدد عدد الساعات الممكنة بحيث تكون للصيغتين المقترحتين نفس الكلفة ؟
3) حدد عدد الساعات الممكنة بحيث تكون الصيغة الأولى أقل كلفة ؟

ملاحظة :

عندما نستخدم تعبيراً مثل (على الأقل – أكثر من – أفضل – أدنى – أقصى ...) فإننا نتكلم عن متراجحة .

1) ليكن x عدد الساعات إذن :

الصيغة 1 هي : $30x + 100 = 30 \times 6 + 100 = 280\ dh$

الصيغة 2 هي : $20x + 200 = 20 \times 6 + 200 = 320\ dh$

بما أن $280dh < 320dh$ إذن سأختار الصيغة 1

2) تكون للصيغتين نفس الكلفة إذا كان : $30x + 100 = 20x + 200$

$30x - 20x = 200 - 100$

يعني أن $10x = 100$

إذن $x = \frac{100}{10} = 10$

التحقق من المعادلة : إذا كان $x = 10$ فإن تكلفة :

الصيغة 1 هي : المبلغ $= 30 \times 10 + 100 = 400\ dh$

الصيغة 2 هي : المبلغ $= 20 \times 10 + 200 = 400\ dh$

وبالتالي عدد الساعات لتكون للصيغتين نفس الكلفة هو 10 .

3) تكون الصيغة 1 أقل تكلفة من الصيغة 2 ، إذا كان $30x + 100 < 20x + 200$

يعني أن $30x - 20x < 200 - 100$

إذن $10x < 100$

ومنه $x < 10$

إذن ستصبح الصيغة 1 أقل كلفة من الصيغة 2 عندما يكون عدد ساعات استغلال الأواني أقل من 10 ساعات.

www.hsaina.com

3 coll

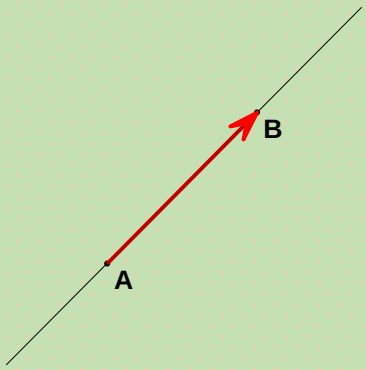
المتجهـــات والإزاحـــة

الجزء الأول : المتجهـــات :

I. المتجهـة:

تعريف

كل نقطتين مختلفتين A و B تحددان متجهة يرمز لها بالرمز $\overrightarrow{AB}$

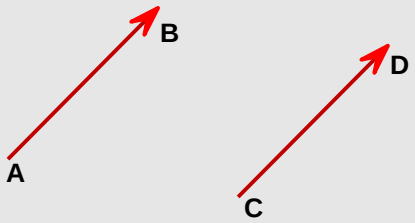


- ✓ A تسمى أصل المتجهة $\overrightarrow{AB}$ و B تسمى طرفها
- ✓ المستقيم (AB) يسمى إتجاه وحامل المتجهة $\overrightarrow{AB}$
- ✓ المسافة AB تسمى منظم أو معيار المتجهة $\overrightarrow{AB}$
- ✓ المنحى من A نحو B هو منحى المتجهة $\overrightarrow{AB}$
- ✓ $\overrightarrow{AA}$ ليس لها اتجاه و تسمى المتجهة المنعدمة إذن $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$
- ✓ مقابل المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هي المتجهة $\overrightarrow{BA}$ ونكتب $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

II. تساوي متجهتين :

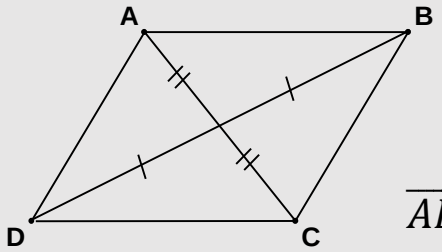
تعريف

تكون $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ إذا كان :



- ✓ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس الإتجاه أي $(AB)//(CD)$
- ✓ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس المنحى
- ✓ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس المنظم (القياس) أي $AB = CD$

خاصيات



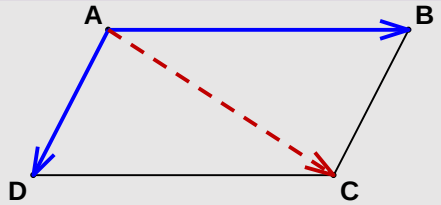
- ✓ تكون $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ إذا كان $[AC]$ و $[BD]$ لهما نفس المنتصف
- ✓ إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ فإن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع
- ✓ إذا كان الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع فإن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- ✓ إذا كان الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع فإن $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

III. مجموع متجهتين :

تعريف

مجموع المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ هو المتجهة $\overrightarrow{AC}$

بحيث $ABCD$ متوازي أضلاع ونكتب $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$



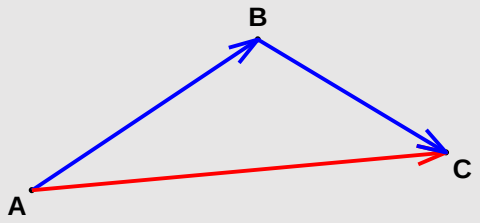
www.hsaina.com

علاقة شـــال

A و B و C نقط من المستوى .

لدينا $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

هذه المتساوية تسمى علاقة شال .



أمثلة : بسط مايلي :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$$

IV. ضرب متجهة في عدد حقيقي :

تعريف

$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة و k عدد حقيقي .

نقول إن المتجهة $\overrightarrow{AC}$ هي جداء المتجهة $\overrightarrow{AB}$ في العدد الحقيقي k إذا كانت C هي نقطة من المستقيم (AB) بحيث $\overrightarrow{AC}=k\,\overrightarrow{AB}$:

✓ إذا كان $k>0$ فإن $AC=k\,AB$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما نفس المنحى .

✓ إذا كان $k<0$ فإن $AC=-k\,AB$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما منحيان متعاكسان .

مثال : $\overrightarrow{AC}=3\,\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}=-2\,\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{2}\,\overrightarrow{AB}$

خاصية 1

إذا كان $\overrightarrow{AC}=k\,\overrightarrow{AB}$ فإن A و B و C نقط مستقيمية .

خاصية 2

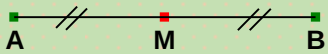
إذا كان $\overrightarrow{AB}=k\,\overrightarrow{MN}$ فإن $(AB)//(MN)$ نقول إن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{MN}$ متجهتان مستقيميتان .

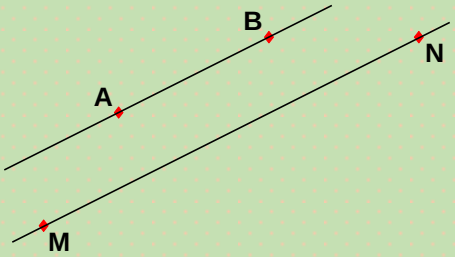
V. المتجهة والمنتصف :

A و B و M ثلاث نقط .

M منتصف $[AB]$ يعني أن :

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}\\ \overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}\end{array}\right\}$$





www.hsaina.com

الجزء الثاني : الإزاحة :

تعريف

A و B نقطتان من المستوى .

النقطة M' هي صورة النقطة M بالإزاحة T ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$ فإن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$

ملاحظة : المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هي المتجهة التي تحول A إلى B بحيث B تسمى صورة A

خاصية 1

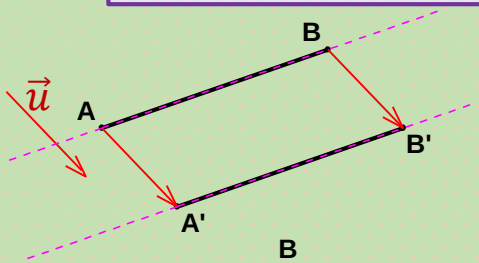
إذا كانت A' و B' صورتي A و B على التوالي بإزاحة $\vec{u}$ فإن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$

خاصية 2

صورة مستقيم (AB) بإزاحة $\vec{u}$ هو مستقيم $(A'B')$ يوازيه

خاصية 3

صورة قطعة $[AB]$ بإزاحة $\vec{u}$ هي قطعة $[A'B']$ تقايسها



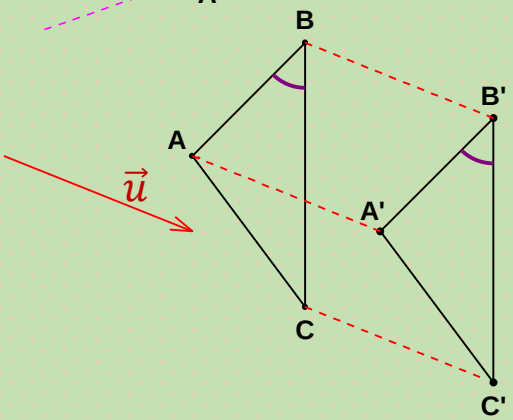
خاصية 4

صورة زاوية بإزاحة هي زاوية تقايسها

مثال :

$\vec{u}$ متجهة غير منعدمة و $A\hat{B}C$ زاوية .

لننشئ الزاوية $A'\widehat{B'}C'$ صورة الزاوية $A\hat{B}C$ بالإزاحة $\vec{u}$



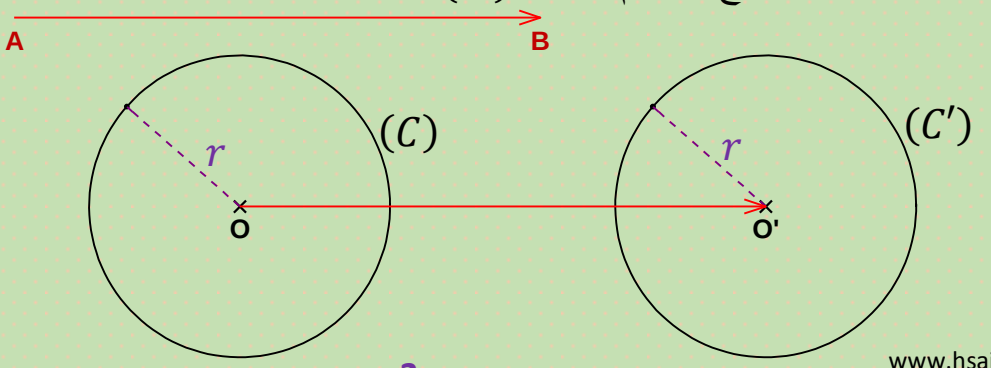
خاصية 5

صورة دائرة (C) بإزاحة $\vec{u}$ هي دائرة (C') لها نفس الشعاع

مثال : $\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة و (C) دائرة مركزها O وشعاعها r

لننشئ الدائرة (C') صورة الدائرة (C) بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$ (الإزاحة التي تحول A إلى B)

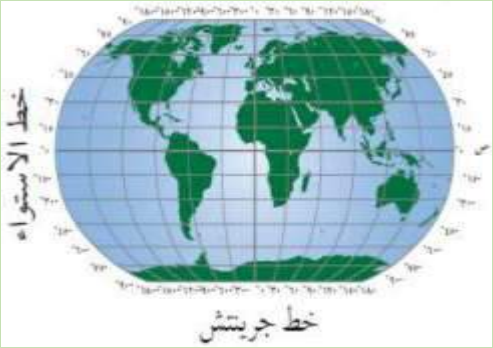
- ✓ أولاً ننشئ المركز O' صورة المركز O بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$
- ✓ ثانياً نحتفظ بنفس الشعاع ونرسم الدائرة (C')



www.hsaina.com

3 coll

المـــعلم في المـــستوى



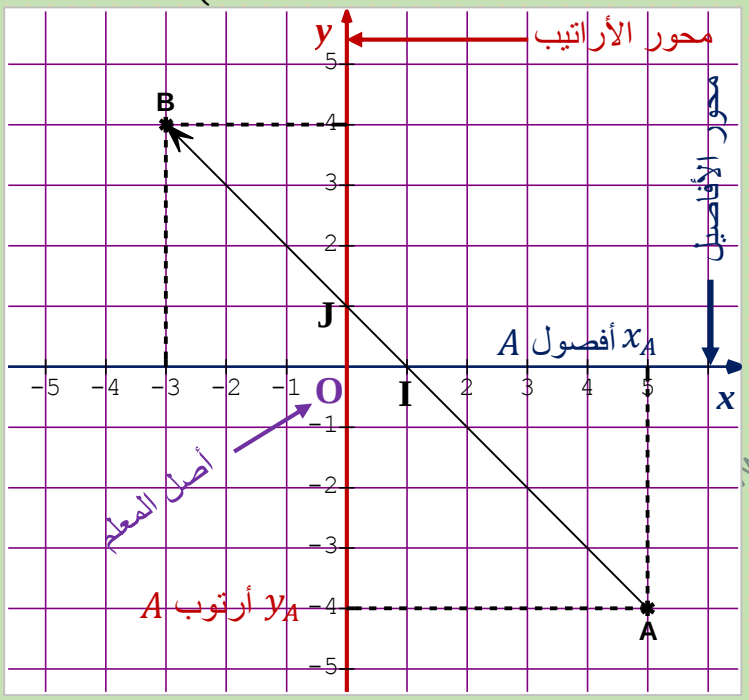
مقدمة :

يتم تعين أماكن المدن والشوارع على الخريطة ويتم تحديد مواقع السفن والطائرات بآستعمال الرادار والأقمار الإصطناعية .

في الرياضيات نستعمل المستوى الإحداثي وهو عبارة عن معلم يحتوي على خطي أعداد متعامدين من أجل تحديد إحداثيات النقط .

I. إحداثيات نقطة :

ليكن (O,I,J) معلماً متعامداً ممنظماً للمستوى $\left(OI = OJ = 1cm \text{ و } (OI)\perp(OJ)\right)$



تعريف

إحداثيات النقطة A في المعلم (O,I,J) هما : x_A و y_A ونكتب $A(x_A;y_A)$ ويسميان زوج إحداثيتي النقطة A .

ملاحظة :

✓ إذا كانت نقطة M تنتمي إلى محور الأفاصيل فإن $y_M = 0$ ونكتب $M(x_M;0)$

✓ إذا كانت نقطة M تنتمي إلى محور الأراتيب فإن $x_M = 0$ ونكتب $M(0;y_M)$

مثال :

حدد إحداثيات النقط O و I و J و A و B :

$O(0;0)$ و $I(1;0)$ و $J(0;1)$ و $A(5;-4)$ و $B(-3;4)$

II. إحداثيتا متجهة :

تعريف

في معلم (O,I,J) نعتبر نقطتين $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$.

إحداثيتا المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هما :

$$\begin{cases} x_B - x_A & \text{الأفصول} \\ y_B - y_A & \text{الأرتوب} \end{cases} \text{ ونكتب } \overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

مثال : حدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$ الممثلة في المعلم أعلاه .حيث $A(5;-4)$ و $B(-3;4)$

لدينا $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$

يعني أن $\overrightarrow{AB}(-3-5; 4-(-4))$

ومنه $\overrightarrow{AB}(-8; 4+4)$

وبالتالي $\overrightarrow{AB}(-8;8)$

www.hsaline.com

خـاصيــات : في معلم (O,I,J) نعتبر $\overrightarrow{AB}(x;y)$ و $\overrightarrow{CD}(x';y')$

خاصية 1

إذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ يعني أن $x=x'$ و $y=y'$

مثال : نعتبر المتجهتين $\overrightarrow{AB}(3;-1)$ و $\overrightarrow{CD}(x_D-5;y_D-2)$

حدد إحداثيات النقطة D علماً أن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

الحل : بما أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ فإن $\begin{cases} x_D-5=3 \\ y_D-2=-1 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} x_D=3+5 \\ y_D=-1+2 \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} x_D=8 \\ y_D=1 \end{cases}$ وبالتالي $D(8;1)$

خاصية 2

إذا كان $\overrightarrow{EF}=k\,\overrightarrow{AB}$ فإن $\overrightarrow{EF}(k\,x\,;\,k\,y)$

مثال : نعتبر المتجهة $\overrightarrow{AB}(3;-1)$ حدد إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{EF}$ علماً أن $\overrightarrow{EF}=-2\,\overrightarrow{AB}$

الحل : بما أن $\overrightarrow{EF}=-2\,\overrightarrow{AB}$ فإن $\overrightarrow{EF}\big(-2\times 3;-2\times(-1)\big)$ وبالتالي $\overrightarrow{EF}(-6;2)$

www.ksaina.com

خاصية 3

إذا كان $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ فإن $\overrightarrow{EF}(x+x'\,;\,y+y')$

مثال : نعتبر المتجهتين $\overrightarrow{AB}(3;-1)$ و $\overrightarrow{CD}(2;-4)$.

حدد إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{EF}$ علماً أن $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

الحل : بما أن $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ فإن $\overrightarrow{EF}\big(3+2;-1+(-4)\big)$

ومنه $\overrightarrow{EF}(5;-1-4)$ وبالتالي $\overrightarrow{EF}(5;-5)$

خاصية 4

إذا كان $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$ فإن $\overrightarrow{EF}(x-x';\,y-y')$

مثال : نعتبر المتجهتين $\overrightarrow{AB}(3;-1)$ و $\overrightarrow{CD}(2;-4)$.

حدد إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{EF}$ علماً أن $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$

الحل : بما أن $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$ فإن $\overrightarrow{EF}\big(3-2;-1-(-4)\big)$

ومنه $\overrightarrow{EF}(1;-1+4)$ وبالتالي $\overrightarrow{EF}(1;3)$

III. إحداثيتا منتصف قطعة :

خاصية

لتكن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ نقطتان من المستوى الإحداثي .

إذا كانت M منتصف القطعة $[AB]$ فإن : $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$ و $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$

مثال : حدد إحداثيتي النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ حيث : $A(5;-4)$ و $B(-3;4)$

$$\begin{cases} x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{5+(-3)}{2}=\frac{2}{2}=1 \\ y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-4+4}{2}=\frac{0}{2}=0 \end{cases}$$

إذن إحداثيتي النقطة I هي $I(1;0)$

(أنظر المعلم أعلاه)

IV. المسافة بين نقطتين :

خاصية

(O,I,J) معلم متعامد ممنظم .نعتبر النقطتين $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$.

المسافة بين النقطتين A و B هي : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

مثال : في المستوى المنسوب على معلم متعامد ممنظم (O,I,J) .

نعتبر النقطتين $M(-2;3)$ و $N(-5;7)$. أحسب المسافة MN

الطريقة 1 : لدينا $MN=\sqrt{(x_N-x_M)^2+(y_N-y_M)^2}$

$$=\sqrt{\left(-5-(-2)\right)^2+(7-3)^2}=\sqrt{(-5+2)^2+(4)^2}$$

$$=\sqrt{(-3)^2+(4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}$$

وبالتالي $MN=5$

الطريقة 2 : نحسب المتجهة $\overrightarrow{MN}$ أولاً : لدينا $\overrightarrow{MN}(x_N-x_M;y_N-y_M)$

إذن $\overrightarrow{MN}(-5-(-2);7-3)$ ومنه $\overrightarrow{MN}(-3;4)$

إذن $MN=\sqrt{(-3)^2+(4)^2}$ يعني أن $MN=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}$

وبالتالي $MN=5$

3 coll

معـــادلة مستقيـــم

I. المعادلة المختصرة لمستقيم :

تعريف

المعادلة المختصرة لمستقيم (D) هي : $y = ax + p$

a: يسمى الميل أو المعامل الموجه أو معدل التغير.

p : يسمى الأرتوب عند الأصل.

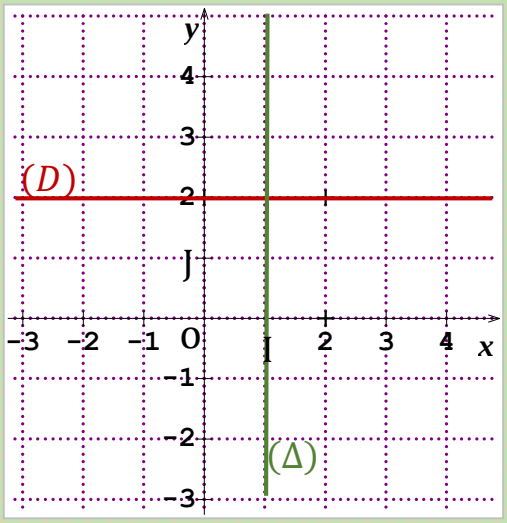
مثال :

✓ $(D) : y = 2x - 3$ هي معادلة مختصرة للمستقيم (D) الدي ميله $a = 2$

و أرتوبه عند الأصل هو $p = -3$

✓ $(\Delta): y = -x$ هي معادلة مختصرة للمستقيم (Δ) الدي ميله $a = -1$

و أرتوبه عند الأصل هو $p = 0$



حالة خاصة :

✓ $(D): y = 2$ هي معادلة للمستقيم (D) المار بالنقطة $A(0; 2)$

و يوازي محور الأفاصيل.

✓ $(\Delta): x = 1$ هي معادلة للمستقيم (Δ) المار بالنقطة $I(1; 0)$

و يوازي محور الأراتيب.

www.hsaima.com

II. إنشاء مستقيم معرف بمعادلته :

نعتبر المستوى المنسوب الى المعلم م.م $(o.i.j)$

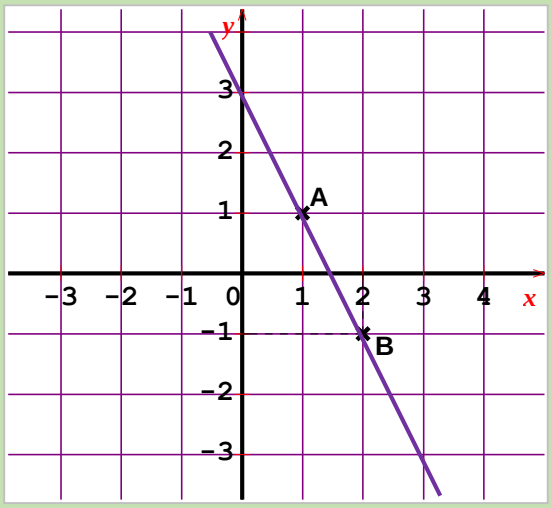
لننشئ المستقيم (AB) الدي معادلته : $(AB):\ y = -2x + 3$

بحيث $A(1; y_A)$ و $B(2; y_B)$

نعوض أفصول A و B في معادلة المستقيم (AB)

$$y_A = -2 \times 1 + 3 = -2 + 3 = 1$$

$$y_B = -2 \times 2 + 3 = -4 + 3 = -1$$



x	y	
1	1	$A(1; 1)$
2	-1	$B(2; -1)$

III. تحديد معادلة مستقيم :

خاصية

إذا كانت $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;;y_B)$ نقطتين بحيث $x_A \neq x_B$

فإن ميل المستقيم (AB) هو : $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

مثال :

لتكن $A(-1;-3)$ و $B(-4;0)$

1) حدد ميل المستقيم (AB) .

2) حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) .

الحل :

1) $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-(-3)}{-4-(-1)} = \frac{0+3}{-4+1}$

$= \frac{3}{-3} = -\frac{3}{3} = -1$

2) لدينا المعادلة المتختصرة ل (AB) تكتب على شكل : $(AB):\ y = ax + p$

إذن $y = -1x + p$

لنحدد p : بما أن النقطة $B(-4;0)$ تنتمي الى المستقيم (AB) فإن

$0 = -1 \times (-4) + p$ إذن $0 = 4 - p$ و منه $p = -4$

و بالتالي المعادلة المختصرة ل (AB) هي : $(AB):\ y = -x - 4$

IV. توازي و تعامد مستقيمين:

1) شرط توازي مستقيمين:

خاصية

- ✓ يكون مستقيمان متوازيان إذا كان لهما نفس الميل .
- ✓ إذا كان لمستقيمين نفس الميل, فهما متوازيان .

مثال 1:

$$\begin{cases} (D_1): y = -2x + 1 \\ (D_2): y = -2x + 5 \end{cases}$$

لدينا (D_1) و (D_2) لهما نفس الميل إذن فهما متوازيان .

www.ksaina.com

مثال 2:

نعتبر المستقيم (AB) بحيث : $(AB): y = -3x + 5$

حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (D) المار بالنقطة $C(2;1)$ والموازي للمستقيم (AB) .

الحل : بما أن ميل (AB) هو -3 و $(AB)//(D)$ فإن $a_{(AB)} = a_{(D)} = -3$

ومنه المعادلة المختصرة للمستقيم (D) هي : $(D): y = -3x + p$

لنحدد p : بما أن (D) يمر من النقطة C إذن $1 = -3 \times 2 + p$ إذن $1 = -6 + p$

ومنه $1 + 6 = p$ إذن $p = 7$ وبالتالي $(D): y = -3x + 7$

2) شرط تعامد مستقيمين:

خاصية

- ✓ يكون مستقيمان متعامدان ،إذا كان جداء ميلهما يساوي -1 .
- ✓ إذا كان جداء ميلي مستقيمين يساوي -1 ، فهما متعامدين .

مثال 2:

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$ نعتبر النقط $A(4;2)$ و $B(2;-1)$

و المستقيم (D) ذي المعادلة $y = -\frac{2}{3}x + 1$

1) حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (AB)

2) إستنتج أن المستقيمين (AB) و (D) متعامدان .

www.hsaina.com

الحل:

1) لنحسب الميل أولا $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-2}{2-4} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$

إذن معادلة المستقيم (AB) تكتب : $y = \frac{3}{2}x + p$

لنحدد p : بما أن النقطة $A(4;2)$ تنتمي الى المستقيم (AB) فإن

$2 = 4 \times \frac{3}{2} + p$ إذن $2 = 6 + p$ و منه $p = -4$

و بالتالي المعادلة المختصرة ل (AB) هي : $(AB):\ y = \frac{3}{2}x - 4$

2) لدينا ميل (AB) هو $\frac{3}{2}$ وميل (D) هو $-\frac{2}{3}$

وبما أن $-\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = -1$ فإن $(AB)\perp(D)$

3 coll

الـــنـــظـــمـــــــات

مقدمة :

أحيانا نصادف بعض التمارين العلمية الصعبة لأن المعطيات غير كافية ولدينا مجهولين أو أكثر نريد أن نحسب أحدهما بطريقة غير مباشرة ، لذلك سوف نحتاج **النظمـــــــات** .

I. نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين :

تعريف

الكتابة : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ تسمى نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين وحلها هو تحديد الأزواج (x,y) التي تتحقق معها المتساويتان معا.

II. الحل الجبري لنظمة :

طريقة التعويض

تعتمد هذه الطريقة على عزل أحد المجهولين في طرف لوحده في إحدى المعادلتين ،ويعوض عن قيمته في المعادلة الأخرى .

مثال : نعتبر النظمة $\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x-7y=12 \end{cases}$

نعزل x في المعادلة الأولى $\begin{cases} x=2y \\ 2x-7y=12 \end{cases}$

نعوض x بقيمتها في الثانية $\begin{cases} x=2y \\ 2(2y)-7y=12 \end{cases}$

$\begin{cases} x=2y \\ 4y-7y=12 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} x=2y \\ -3y=12 \end{cases}$

$\begin{cases} x=2\times(-4) \\ y=-4 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} x=-8 \\ y=-4 \end{cases}$

نقول : النظمة تقبل حلاً وحيداً هو الزوج $(-8,-4)$

طريقة التأليفة الخطية

تسمى كذلك طريقة الحل بالحذف حيث تستخدم العمليات الحسابية مثل الضرب بمعامل الجمع والطرح لحذف أحد المجهولين .

مثال : نعتبر النظمة $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+3y=20 \end{cases}$

✓ **من أجل حذف المجهول x :**

← نضرب طرفي المعادلة الأولى في المعامل -2 وطرفي المعادلة الثانية في المعامل 1 :

$\begin{cases} x-3y=1 & \times(-2) \\ 2x+3y=20 & \times 1 \end{cases}$ فنحصل على $\begin{cases} -2x+6y=-2 \\ 2x+3y=20 \end{cases}$

www.hsaina.com

← ثم نجمع المعادلتين طرفاً بطرف فنحصل على : $-2x + 2x + 6y + 3y = -2 + 20$

يعني $9y = 18$ إذن $y = 2$

✓ **من أجل حذف المجهول y :**

← لا نحتاج لضرب طرفي المعادلتين في معامل لأن المجهول y له نفس المعامل وهو 3 : $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + 3y = 20 \end{cases}$

إذن يكفي بجمع المعادلتين طرفا بطرف فنحصل على : $x + 2x - 3y + 3y = 1 + 20$

يعني $3x = 21$ إذن $x = 7$

وبالتالي $\begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \end{cases}$ نقول : النظمة تقبل حلاً وحيداً هو الزوج $(7;2)$

III. الحل المبياني أو الهندسي لنظمة :

كل معادلة من النظمة مرتبطة بمستقيم يجب تحديد معادلته المختصرة وتمثيله

مثال : حل مبيانياً النظمة $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ -x + 2y = -1 \end{cases}$

➢ **الخطوة 1 :** إعزل y في كلتا المعادلتين :

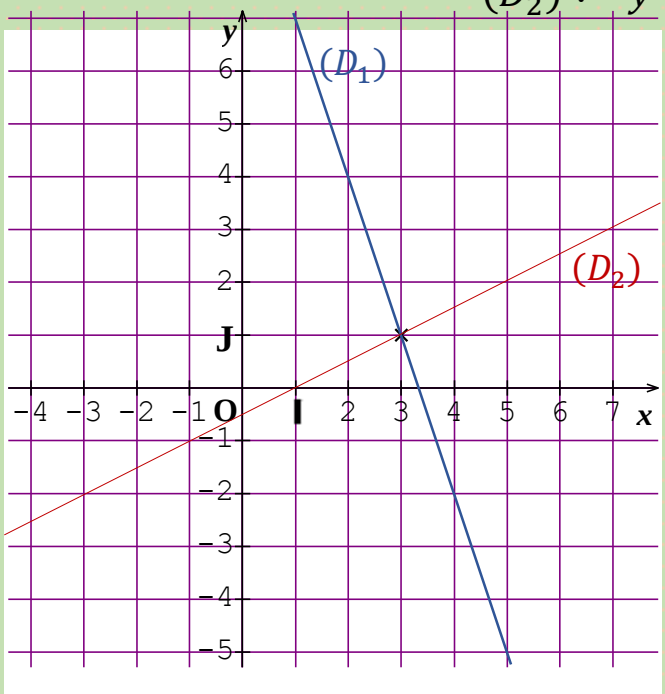
$\begin{cases} y = -3x + 10 \\ 2y = x - 1 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} y = -3x + 10 \\ y = \frac{x-1}{2} \end{cases}$ يعني $\begin{cases} y = -3x + 10 \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$

www.hsaina.com

➢ **الخطوة 2 :** مثل مبيانيا المستقيمين في نفس المعلم :

ليكن (D_1) المستقيم الذي معادلته : $(D_1) : \quad y = -3x + 10$

ليكن (D_2) المستقيم الذي معادلته : $(D_2) : \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$



نختار بالنسبة ل (D_1) نقطتين :

x	3	4
y	1	-2

نختار بالنسبة ل (D_2) نقطتين :

x	1	3
y	0	1

نلاحظ مبيانيا أن (D_1) و (D_2) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيات $(3;1)$

إذن حل النظمة هو الزوج $(3;1)$

www.hsaina.com

IV. مسألة :

واجب المشاركة في رحلة ترفيهية هو 200 درهم للكبار و 150درهم للصغار ، شارك في الرحلة 35 فردا فكان المبلغ الإجمالي المحصل عليه هو 6250 درهما .

ماهو عدد المشاركين الكبار وعدد المشاركين الصغار في الرحلة ؟

❖ لحل هذه المسألة نتبع الخطوات التالية :

1) اختيار المجهولين :

ليكن x عدد المشاركين الكبار .

و ليكن y عدد المشاركين الصغار .

2) صياغة النظمة :

✓ شارك في الرحلة 35 فردا يعني : $x + y = 35$

✓ واجب المشاركة في الرحلة هو 200 درهم للكبار و 150 درهم للصغار والمبلغ الإجمالي المحصل هو 6250 درهم يعني : $200x + 150y = 6250$

وبالتالي نحصل على النظمة : $\begin{cases} x + y = 35 \\ 200x + 150y = 6250 \end{cases}$

3) حل النظمة :

لدينا $\begin{cases} x + y = 35 \\ 200x + 150y = 6250 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x = 35 - y \\ 200(35 - y) + 150y = 6250 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 35 - y \\ 200 \times 35 - 200 \times y + 150y = 6250 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 35 - y \\ 7000 - 200y + 150y = 6250 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 35 - y \\ -200y + 150y = 6250 - 7000 \end{cases}$

يعني $\begin{cases} x = 35 - y \\ -50y = -750 \end{cases}$

إذن $\begin{cases} x = 35 - y \\ y = \dfrac{-750}{-50} \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} x = 35 - 15 \\ y = 15 \end{cases}$

إذن $\begin{cases} x = 20 \\ y = 15 \end{cases}$

4) التحقق من المسألة :

لدينا $20 + 15 = 35$ و $200 \times 20 + 150 \times 15 = 6250$ إذن الزوج $(20;15)$ حل للنظمة.

5) الرجوع إلى المسألة :

عدد المشاركين الكبار هو: 20 فرداً

عدد المشاركين الصغار هو: 15 فرداً

www.hsaina.com

www.hsaina.com

3 coll

الدالة الخطية و الدالة التآلفية

الجزء الأول : الدالة الخطية :

غالباً ما نسمع العبارات التالية :

✓ الضغط الجوي بدلالة الإرتفاع .
✓ الطاقة المستهلكة بدلالة مدة الإشتغال .
✓ المسافة المقطوعة بدلالة المدة .
✓ أجرة العامل بدلالة ساعات العمل .

تعريف

a عدد حقيقي معلوم .
العلاقة f التي تربط كل عدد حقيقي x بالعدد الحقيقي ax تسمى دالة خطية معاملها a
ونكتب : $f(x) = ax$
✓ العدد ax يسمى صورة العدد x بالدالة f .

مثال 1 :

كان معدل الولادات في عام 2016 على مستوى العالم ، أربعة مواليد تقريباً كل ثانية (s) . كون جدولاً وأوجد تعبير الدالة .

s	1	2	3	4
$f(s)$	4	8	12	16

إذن تعبير الدالة هو : $f(s) = 4s$

مثال 2 : أمثلة لبعض الدوال الخطية :

$f(x) = 3x$ و $g(x) = 0x$ و $h(x) = \frac{1}{2}x$ و $u(x) = -x$

www.hsaid.com

مثال 3 : لتكن f الدالة الخطية المعرفة ب : $f(x) = 2x$

1) أحسب $f(0)$ $f(-1)$
2) حدد صورة العدد 3 بالدالة f (أي $f(3)$)
3) حدد العدد x الذي صورته بالدالة f هي العدد -8

الحـــل :

1) لدينا $f(x) = 2x$ إذن $f(0) = 2 \times 0 = 0$ و $f(-1) = 2 \times (-1) = -2$
2) العدد هو x و الصورة هي $f(x)$ إذن $f(3) = 2 \times 3 = 6$ إذن صورة 3 بالدالة f هي 6
3) لنحل المعادلة : $f(x) = -8$ إذن $2x = -8$ ومنه : $x = \frac{-8}{2}$ وبالتالي $x = -4$

خاصية

إذا كانت f دالة خطية و x عدد حقيقي غير منعدم ، فإن :
معامل الدالة f هو العدد الحقيقي : $a = \frac{f(x)}{x}$

مثال : نعتبر الدالة الخطية بحيث : $f(2) = 6$. بين أن : $f(x) = 3x$

الحـــل : بما أن الدالة f خطية إذن معاملها هو $a = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(2)}{2} = \frac{6}{2} = 3$

وبما أن صيغة الدالة الخطية تكتب على الشكل : $f(x) = ax$ فإن : $f(x) = 3x$

التمثيل المبياني لدالة خطية :

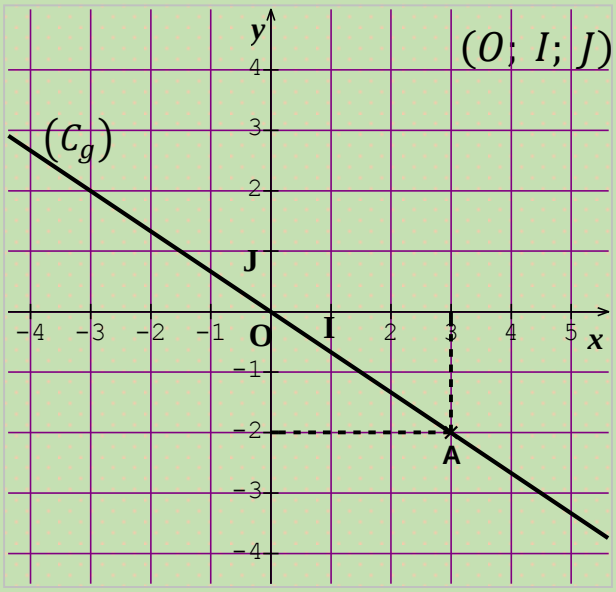
خاصية

في معلم $(O;\ I;\ J)$ ، التمثيل المبياني لدالة خطية هو مستقيم يمر من أصل المعلم O

مثال : لتكن g الدالة الخطية المعرفة ب : $g(x) = \frac{-2}{3}x$

1) أحسب $g(3)$

2) أنشئ التمثيل المبياني للدالة g في معلم متعامد ممنظم $(O;\ I;\ J)$



الحـــل : 1) لدينا $g(x) = \frac{-2}{3}x$

إذن $g(3) = \frac{-2}{3} \times 3 = -2$

2) لدينا $g(3) = -2$

ومنه التمثيل المبياني للدالة g عبارة عن مستقيم

يمر من النقطتين $A(3;-2)$ و $O(0;0)$ أصل المعلم .

الجزء الثاني : الدالة التآلفية :

www.hsaina.com

تعريف

a و b عددان حقيقيان معلومان .

العلاقة f التي تربط كل عدد حقيقي x بالعدد الحقيقي $ax + b$ تسمى دالة تآلفية معاملها a

ونكتب : $f(x) = ax + b$

✓ العدد $ax + b$ يسمى صورة العدد x بالدالة f .

مثال 1 : أمثلة لبعض الدوال التآلفية :

$f(x) = x - 3$ و $g(x) = \frac{3}{2}x - 1$ و $h(x) = -2x - 2$

مثال 2 : يصل ارتفاع نبتة إلى $4\ cm$ وينمو $2\ cm$ كل يوم .

1) أكتب دالة تعبر عن المسألة ؟

2) توقع طول النبتة بعد مرور 8 أيام ؟

الحـــل :

1) لدينا معامل الدالة (معدل التغير اليومي) هو $a = 2\ cm$ والطول الأصلي للنبتة هو $b = 4\ cm$

إذن المسألة عبارة عن دالة تآلفية صيغتها هي : $f(x) = 2x + 4$

2) لدينا x هو عدد الأيام إذن طول النبتة بعد 8 أيام هو $f(8)$

إذن : $f(8) = 2 \times 8 + 4 = 16 + 4 = 20$

وبالتالي طول النبتة بعد 8 أيام هو : $20\ cm$

مثال 3 : لتكن g دالة تآلفية بحيث : $g(x) = 2x - 4$

1) أحسب $g(0)$ و $g(1)$

2) أحسب صورة العدد 2 بالدالة g

3) حدد العدد الذي صورته 6 بالدالة g

الحـــل :

1) $g(0) = 2 \times 0 - 4 = -4$ و $g(1) = 2 \times 1 - 4 = 2 - 4 = -2$

2) لدينا $g(x) = 2x - 4$ إذن $g(2) = 2 \times 2 - 4 = 4 - 4 = 0$

3) لدينا $g(x) = 6$ إذن $2x - 4 = 6$ ومنه $2x = 6 + 4$

يعني أن $x = \frac{10}{2}$ وبالتالي العدد هو $x = 5$

خاصية

f دالة تآلفية و x_1 و x_2 عددان حقيقيان :

معامل الدالة f هو : $a = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$

مثال : f دالة تآلفية بحيث : $f(1) = 5$ و $f(0) = 3$

1) حدد معامل الدالة f

2) حدد صيغة الدالة $f(x)$

www.hsaina.com

الحـــل :

1) لدينا f دالة تآلفية إذن $a = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{5-3}{1-0} = 2$ وبالتالي معامل الدالة f هو : $a = 2$

2) لدينا f دالة تآلفية إذن صيغتها تكتب على الشكل : $f(x) = ax + b$ إذن $f(x) = 2x + b$

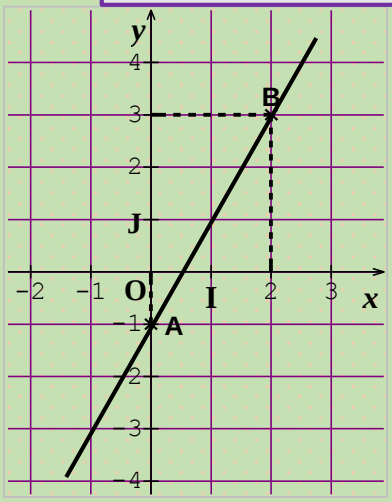
لنحدد العدد الحقيقي b : بما أن $f(0) = 3$ إذن $f(0) = 2 \times 0 + b = 3$

إذن $b = 3$ و $a = 2$ وبالتالي صيغة الدالة f هي : $f(x) = 2x + 3$

لتمثيل المبياني لدالة تآلفية :

تعريف

التمثيل المبياني لدالة تآلفية هو مستقيم يمر من نقطتين $A(x_1; f(x_1))$ و $B(x_2; f(x_2))$



مثال : نعتبر الدالة التآلفية f بحيث : $f(x) = 2x - 1$

والنقطتين $A(0; f(0))$ و $B(2; f(2))$.

أحسب $f(0)$ و $f(2)$ وأنشئ المستقيم (AB) التمثيل المبياني للدالة f

الحـــل :

$f(0) = 2 \times 0 - 1 = 0 - 1 = -1$ إذن $A(0; -1)$

$f(2) = 2 \times 2 - 1 = 4 - 1 = 3$ إذن $B(2; 3)$

3 coll

الإحـــصـــــاء

تذكير :

الدراسة الإحصائية : هي دراسة لظاهرة أو خاصية يتميز بها أفراد مجموعة .

الساكنة الإحصائية : هي العينة أو المجموعة التي تخضع للدراسة الإحصائية .

الميزة الإحصائية : هي الظاهرة التي تتم دراستها وهي خاصية يمكن ملاحظتها أو قياسها على كل الوحدات الإحصائية ، وهي نوعان :

أ - ميزة كمية : وهي ميزة يمكن التعبير عنها بأعداد مثل (عدد الأطفال - نقط تلاميذ - العمر - الوزن - الطول - درجة الحرارة ...)

ب - ميزة نوعية : وهي الميزة التي لا يمكن التعبير عنها بأعداد مثل (الجنس - الجنسية - فصيلة الدم - اللون - نوع السيارة - الرياضة المفضلة - ...)

الحصيص : هو عدد الوحدات التي تأخذها كل قيمة من قيم الميزة ونرمز له ب n_i

الحصيص الإجمالي : هو مجموع الحصيصات (التكرارات) ونرمز له ب N

الحصيص المتراكم: الحصيص المتراكم الموافق لقيمة الميزة x_i هو العدد N_i حيث $N_i = n_1 + n_2 + \cdots + n_i$ حيث n_1 و n_2 و ... n_i هي حصيصات القيم التي أصغر أو تساوي x_i

المدى : الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة .

التردد : تردد القيمة x_i هو خارج الحصيص n_i لقيمة x_i على N ونرمز له ب f_i حيث $f_i = \frac{n_i}{N}$

التردد المتراكم : التردد المتراكم F_i الموافق لقيمة الميزة x_i هو $F_i = f_1 + f_2 + \cdots + f_i$

النسبة المئوية : النسبة المئوية P_i الموافقة لقيمة الميزة x_i هي $P_i = f_i \times 100$ حيث f_i التردد الموافق ل x_i

المتسلسلة الإحصائية : هي التوزيع الذي نحصل عليه من الحصيص الإجمالي على مختلف قيم الميزة .

www.hsaina.com

I. جدول الحصيصات والحصيصات المتراكمة والترددات والترددات المتراكمة :

1) متسلسلة بالقيم :

إذا كانت الميزة كمية وعدد قيمها قليل، نرتب هذه القيم تصاعديا .

تطبيق 1 :

يمثل الجدول الإحصائي التالي متسلسلة إحصائية تعبر عن توزيع 24 منخرطا بإحدى الأندية حسب أعمارهم .

الميزة	12	13	14	15	16
الحصيص	5	6	x	8	4
الحصيص المتركم		11			24
التردد					
التردد المتراكم					

1) حدد الساكنة الإحصائية ؟ الساكنة الإحصائية هي 24 منخرطا بإحدى الأندية .

2) حدد الوحدة الإحصائية؟ الوحد الإحصائية هي منخرط .

3) حدد الميزة المدروسة محددا نوعها ؟ الميزة المدروسة هي عمر المنخرط وهي ميزة كمية .

4) حدد عدد المنخرطين x الذين عمرهم 14 سنة

لدينا الحصيص الإجمالي هو $N = 24$

إذن $24 = 5 + 6 + x + 8 + 4$ إذن $24 = 23 + x$ إذن $x = 24 - 23$ وبالتالي $x = 1$

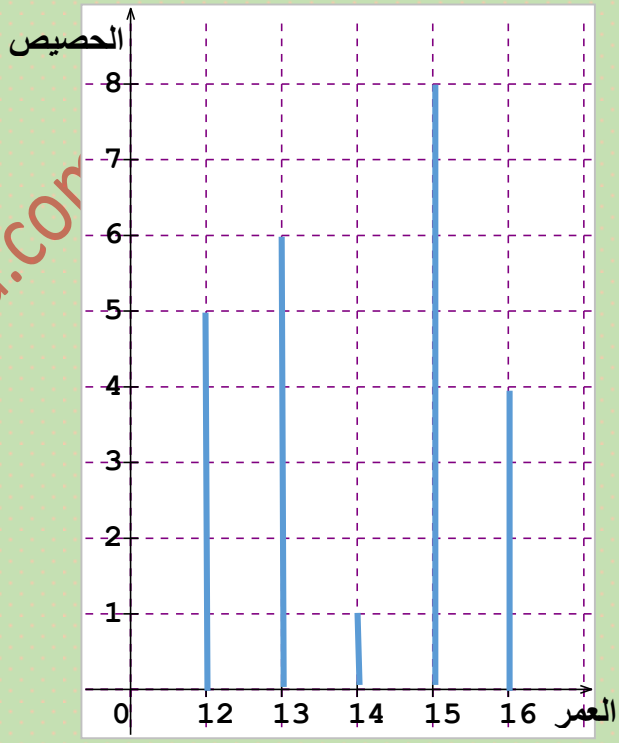
5) أنقل الجدول ثم أتممه .

الميزة	12	13	14	15	16
الحصيص	5	6	1	8	4
الحصيص المتركم	5	11	12	20	24
التردد	$\frac{5}{24} = 0,21$	$\frac{6}{24} = 0,25$	$\frac{1}{24} = 0,04$	0,33	0,17
التردد المتراكم	0,21	0,46	0,50	0,83	1

6) أحسب مجموع الترددات ؟ ماذا تستنتج

لدينا $F = 0,21 + 0,25 + 0,04 + 0,33 + 0,17 = 1$ نستنتج أن مجموع الترددات يساوي 1

7) مثل المتسلسلة الإحصائية بمبيان عصوي .



www.hsaina.com

تطبيق 2 :

أجريت دراسة إحصائية حول عدد الأطفال ب 20 أسرة وأعطت النتائج التالية :

2 - 3 - 4 - 3 - 0 - 4 - 3 - 2 - 1 - 1 - 2 - 1 - 0 - 2 - 3 - 4 - 1 - 0

1) إعط جدولاً للحصيصات والحصيصات المتراكمة لهذه المسلسلة .

2) أحسب التردد الموافق لقيمة الميزة 0

3) أحسب النسبة المئوية الموافقة لقيمة الميزة 0

4) أحسب النسبة المئوية لعدد الأسر التي يفوق بها عدد الأطفال طفليين .

5) مثل هذه المتسلسلة الإحصائية بالأعمدة .

حل التطبيق 2 :

1) إعط جدولاً للحصيصات والحصيصات المتراكمة لهذه المسلسلة .

الميزة : عدد الأطفال	0	1	2	3	4
الحصيص:عدد الأسر	3	5	4	5	3
الحصيص المتركم	3	8	12	17	20

2) أحسب التردد الموافق لقيمة الميزة 0

ليكن f تردد قيمة الميزة 0 إذن : $f = \frac{n}{N} = \frac{3}{20} = 0,15$

3) أحسب النسبة المئوية الموافقة لقيمة الميزة 0

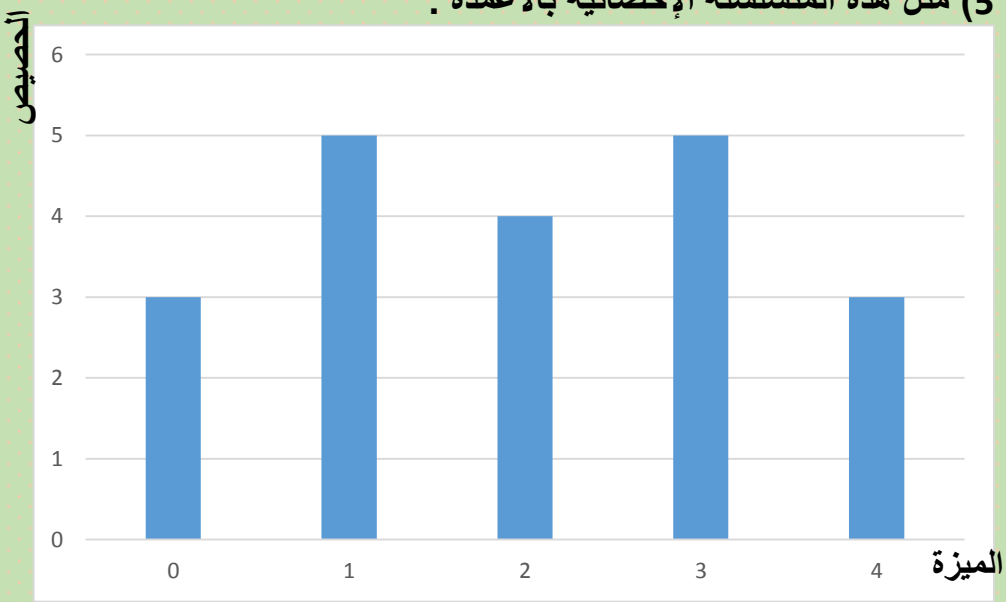
النسبة المئوية الموافقة لقيمة الميزة 0 هي : $P = f \times 100 = 0,15 \times 100 = 15\ \%$

4) أحسب النسبة المئوية لعدد الأسر التي يفوق بها عدد الأطفال طفليين .

لدينا عدد الأسر التي يفوق بها عدد الأطفال طفليين هو : $n = 5 + 3 = 8$

إذن النسبة المئوية هي : $P = f \times 100 = \frac{n}{N} = \frac{8}{20} \times 100 = 40\ \%$

5) مثل هذه المتسلسلة الإحصائية بالأعمدة .



2) متسلسلة بالأصناف :

إذا كانت الميزة كمية وعدد قيمها كبير فبدل دراسة جميع قيم الميزة، نلجأ إلى حصرها في مجالات $[a; b[$ لها نفس السعة تسمى أصنافاً ونسمى مركز الفئة العدد $\frac{a+b}{2}$

تطبيق 3 :

يعطي الكشف التالي توزيع أعمار العاملين في إحدى الضيعات الفلاحية :

16 - 26 - 34 - 17 - 22 - 45 - 36 - 27 - 29 - 25 - 19 - 18 - 32 - 42 - 21 - 33 - 35 -

16 - 26 - 34 - 17 - 22 - 38 - 36 - 27 - 29 - 38 - 13 - 18 - 32 - 30 - 39

1) حدد الساكنة الإحصائية لهذه المتسلسلة .

2) حدد الميزة الإحصائية محددا نوعها .

3) أنقل الجدول ثم أكمله .

العمر بالسنوات	$[10;20[$	$[20;30[$	$[30;40[$	$[40;50[$
مركز الصنف				
الحصيص: عدد العمال				

4) كم عدد عمال الضيعة الفلاحية .

5) أحسب نسبة العمال الذين أعمارهم أقل من 20 سنة .

6) أحسب تردد الصنف $[30;40[$

7) أنشئ مدراج لتوزيع عمال الضيعة الفلاحية حسب أصناف أعمارهم .

حل التطبيق 3 :

1) الساكنة الإحصائية هي عمال الضيعة الفلاحية .

2) الميزة الإحصائية هي عمر العمال و هي ميزة كمية متصلة .

3) أنقل الجدول ثم أكمله .

العمر بالسنوات	$[10;20[$	$[20;30[$	$[30;40[$	$[40;50[$
مركز الصنف	$\frac{10+20}{2}=15$	25	35	45
الحصيص: عدد العمال	8	10	12	2

4) عدد عمال الضيعة الفلاحية هو الحصيص الإجمالي : $N = 8 + 10 + 12 + 2 = 32$

إذن عدد عمال الضيعة الفلاحية هو 32 عاملاً .

5) أحسب نسبة العمال الذين أعمارهم أقل من 20 سنة .

لدينا عدد العمال الذين تفوق أعمارهم أو تساوي 30 سنة هو : $n = 8$

$$P = f \times 100 = \frac{n}{N} \times 100 = \frac{8}{32} \times 100 = 25\ \%$$

إذن نسبة العمال الذين أعمارهم أقل من 20 سنة هي : 25 %

6) أحسب تردد الصنف $[30;40[$

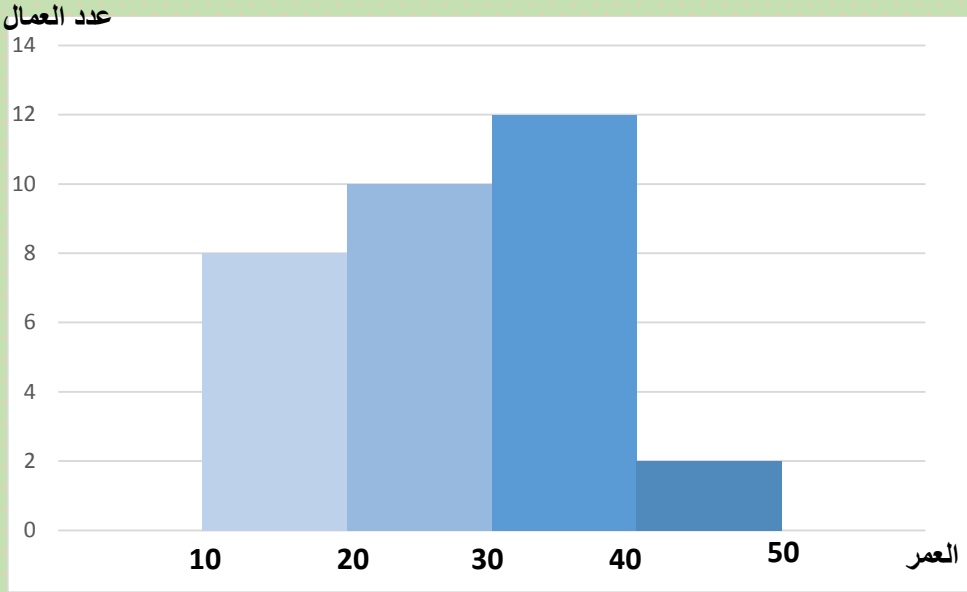
ليكن f تردد الصنف $[30;40[$ إذن : $f = \frac{n}{N} = \frac{12}{32} = 0{,}375$

إذن تردد الصنف $[30;40[$ هو : 0,375

7) أنشئ مدراج لتوزيع عمال الضيعة الفلاحية حسب أصناف أعمارهم .

إذا كانت المسلسلة عبارة عن أصناف $[a;b[$ أو مجالات $a \leq x < b$ نستعمل مبيان يسمى مدراج أو مبيان بالأشرطة .

www.hsaina.com



II. وسيطات الوضع :

1) المنوال :

تعريف

المنوال هو قيمة الميزة التي لها أكبر حصيص

مثال 1 : أنظر التطبيق 1

الميزة	12	13	14	15	16
الحصيص	5	6	1	8	4

لدينا أكبر حصيص هو 8 وميزته هي 15 إذن المنوال هو 15

مثال 2 : أنظر التطبيق 2

الميزة : عدد الأطفال	0	1	2	3	4
الحصيص:عدد الأسر	3	5	4	5	3

لدينا أكبر حصيص هو 5 وميزته هي قيمة الميزة 1 و الميزة 3 إذن لدينا منوالان في هذه الحالة وهما 1 و 3

مثال 3 : أطوال 8 تلاميذ بالسنتيمتر هي :

61 - 68 - 67 - 73 - 66 - 64 - 59 - 70

هل يوجد قيمة تكررت أكثر من غيرها في هذه البيانات ؟

الجواب لا ، إذن لا يوجد منوال لهذه البيانات .

2) المعدل الحسابي :

تعريف 1

المعدل الحسابي m هو القيمة التي يمكن الحصول عليها عن طريق جمع جميع القيم وقسمتها على عددها.

مثال : المعطيات التالية تبين نقط تلميذ في 3 فروض لمادة الرياضيات : 17 - 8 - 11

$m = \frac{11+8+17}{3} = 12$ إذن معدله هو 12 في الرياضيات .

www.hsaina.com

تعريف 2

المعدل الحسابي $\bar{x}$ لمتسلسلة إحصائية هو خارج مجموع جداءات قيم الميزة والحصيصات(التكرارات) الموافقة لها على الحصيص الإجمالي .

مثال 2 : أنظر التطبيق 2

الميزة : عدد الأطفال	0	1	2	3	4
الحصيص:عدد الأسر	3	5	4	5	3

$$\bar{x} = \frac{(0\times 3)+(1\times 5)+(2\times 4)+(3\times 5)+(4\times 3)}{20} = \frac{0+5+8+15+12}{20} = 2$$

إذن 2 هو معدل عدد الأطفال في كل أسرة .

مثال 3 : أنظر التطبيق 3

العمر بالسنوات	[10; 20[	[20; 30[	[30; 40[	[40; 50[
مركز الصنف	$\frac{10+20}{2} = 15$	25	35	45
الحصيص: عدد العمال	8	10	12	2

$$m = \frac{(15\times 8)+(25\times 10)+(35\times 12)+(45\times 2)}{32} = 27{,}5$$

إذن معدل أعمار العمال هو 27,5 وهذا يعني أنه إذا افترضنا أن للعمال نفس العمر سيكون عمر كل عامل 27,5

3) القيمة الوسطية :

تعريف 1

القيمة الوسطية لمتسلسلة إحصائية قيم ميزتها مرتبة ترتيبا تصاعدياً أو تنازلياً هي قيمة الميزة التي تقسم هذه المتسلسلة إلى جزأين لهما نفس الحصيص .

الحالة 1 : **عدد قيم السلسلة الإحصائية عدد فردي**

مثال : عدد الغيابات المسجلة خلال 7 أيام لعمال شركة كان كالتالي : 3 - 1 - 2 - 0 - 4 - 2 - 3

ماهي القيمة الوسطية لعدد غيابات عمال الشركة خلال هذه المدة ؟

للإجابة : نرتب عدد الغيابات : 0 - 1 - 2 - 2 - 3 - 3 - 4

3 قيم 3 قيم

إذن القيمة الوسطية هي 2

الحالة 2 : **عدد قيم السلسلة الإحصائية عدد زوجي**

مثال : عدد الغيابات المسجلة خلال 8 أيام لعمال شركة كان كالتالي : 3 - 1 - 5 - 0 - 4 - 2 - 1 -4

ماهي القيمة الوسطية لعدد غيابات عمال الشركة خلال هذه المدة ؟

للإجابة : نرتب عدد الغيابات : 0 - 1 - 1 - 2 - 3 - 4 - 4 - 5

4 قيم 4 قيم

إذن القيمة الوسطية هي القيمة الحصورة بين 2 و 3 أي $\frac{2+3}{2} = 2{,}5$ إذن القيمة الوسطية هي 2,5

www.hsaina.com

تعريف 2

القيمة الوسطية لمتسلسلة إحصائية هي قيمة الميزة التي حصيصها المتراكم أكبر أو يساوي نصف الحصيص الإجمالي .

مثال : أنظر التطبيق 1

الميزة	12	13	14	15	16
الحصيص	5	6	1	8	4
الحصيص المتركم	5	11	12	20	24

حدد القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الإحصائية

الإجابة : لدينا الحصيص الإجمالي هو 24 ونصفه هو 12

وأصغر قيم الميزة التي حصيصها المتراكم أكبر أو يساوي 12 هي 14

إذن القيمة الوسطية هي 14

III. التشتت :

تعريف

تكون قيم ميزة متسلسلة إحصائية أقل تشتتاً إذا كانت هذه القيم قريبة من المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة .

تطبيق 4 :

نعتبر الجدول التالي :

الفروض	الفرض 1	الفرض 2	الفرض 3	الفرض 4
نقط التلميذ سعيد	9	14	10	15
نقط التلميذة مريم	6	9	16	17

1) أحسب معدل كل من سعيد ومريم ؟ ماذا تلاحظ

2) ماذا تستنتج

الإجابة :

1) معدل سعيد هو : $m = \frac{9+14+10+15}{4} = 12$

ومعدل مريم هو $m = \frac{6+9+16+17}{4} = 12$ نلاحظ أن سعيد ومريم لهما نفس المعدل كما نلاحظ أن نقط سعيد أقرب إلى المعدل 12 من نقط مريم .

2) نستنتج أن نقط سعيد أقل تشتتاً من نقط مريم .

www.hsaina.com

مادة الرياضيات 3AC

فيتاغورس في الفضاء + المساحات و الحجوم + التكبير و التصغير

أهم فقرات الدرس

I _ تعامد مستقيم و مستوى في الفضاء :

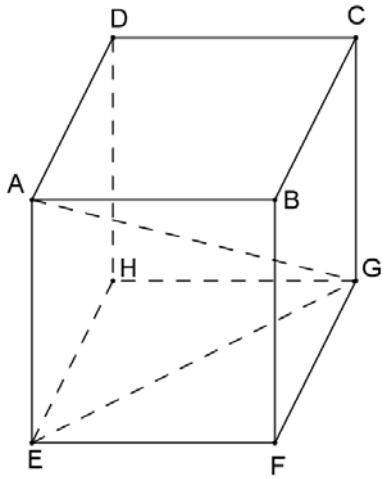
1) – تعريف :

(D) مستقيم و (P) مستوى في الفضاء.
يكون المستقيم (D) عموديا على المستوى (P) في نقطة A إذا كان
(D) عموديا على مستقيمين ضمن (P) و متقاطعين في A

*/ مثال :

$ABCDEFGH$ مكعب .

لنبين أن المستقيم (AE) عمودي على المستوى $(EFGH)$



لدينا :

$ABFE$ و $ADHF$ مربعان .

إذن :

(AE) عمودي على (EF) في E
و (AE) عمودي على (EH) في E
و بما أن (EF) و (EH) ضمن المستوى $(EFGH)$
و يتقاطعان في النقطة E فإن :
المستقيم (AE) عمودي على المستوى $(EFGH)$ في النقطة E

2) – خـاصية :

(D) مستقيم و (P) مستوى في الفضاء.
إذا كان (D) عموديا على (P) في النقطة M ، فإن (D) عمودي على جميع المستقيمات ضمن (P) و المارة من M .

*/ مثال :

نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ أعلاه .

لنبين أن المثلث AEG قائم الزاوية في E .
نعلم أن المستقيم (AE) عمودي على المستوى $(EFGH)$ في النقطة E .

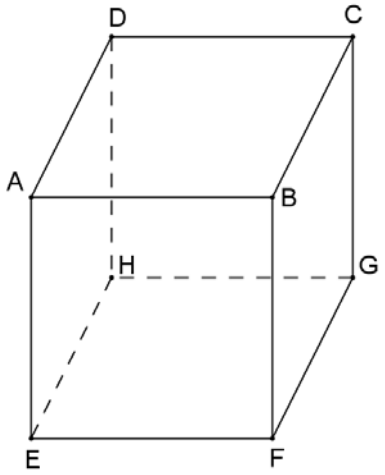
و بما أن المستقيم (EG) ضمن المستوى $(EFGH)$ و يقطع (AE) في E فإن :
المستقيم (AE) عمودي على المستقيم (EG) في E .
و بالتالي فإن المثلث AEG قائم الزاوية في E .

II _ توازي مستقيم و مستوى في الفضاء :

1) – تعريف :

(D) مستقيم و (P) مستوى في الفضاء.
يكون المستقيم (D) موازيا للمستوى (P) إذا كان يوجد ضمن (P)

*/ مثال :



$ABCDEFGH$ مكعب .

لنبين أن المستقيم (AB) يوازي المستوى $(EFGH)$

لدينا :

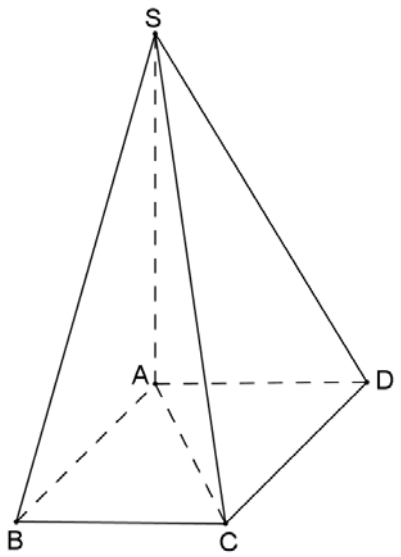
$ABFE$ مربع ، إذن فهو متوازي الأضلاع .
و منه فإن : $(EF) // (AB)$.
و بما أن : المستقيم (EF) ضمن المستوى $(EFGH)$
فإن : $(EFGH) // (AB)$.

III _ تطبيق مبرهنة فيتاغورس في الفضاء :

1) – الخاصية المباشرة :

*/ مثال :

$SABCD$ هرم قاعدته المربع $ABCD$ و ارتفاعه (SA) بحيث :
$AB = 4\,cm$ و $SA = 6\,cm$.
لنحسب : SC .



1/ حساب AC .

نعلم أن القاعدة $ABCD$ مربع .
إذن المثلث ABC قائم الزاوية في B .
و حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة سيكون لدينا :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

أي : $AC^2 = 4^2 + 4^2$
$= 16 + 16$
$= 32$

و بما أن : $AC > 0$ فإن : $AC = \sqrt{32}$

أي : $\boxed{AC = 4\sqrt{2}\ cm}$.

2/ لنحسب SC .

نعلم أن (SA) إرتفاع الهرم $SABCD$.

إذن المستقيم (SA) عمودي على المستوى $(ABCD)$ في النقطة A .

و بما أن المستقيم (AC) يوجد ضمن المستوى $(ABCD)$ و يقطع (SA) في A فإن : $(AC)\perp(SA)$

و منه فإن المثلث SAC قائم الزاوية في A .

إذن : حسب تطبيق مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن :

$$SC^2 = AS^2 + AC^2$$

أي :

$$SC^2 = 6^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2$$
$$= 36 + 32$$
$$= 68$$

و بما أن : $SC > 0$ فإن : $SC = \sqrt{68}$

أي : $\boxed{SC = 2\sqrt{17}}$

2) – الخاصية العكسية :

*/ مثال :

$SABC$ رباعي أوجه قاعدته المثلث ABC بحيث :

$AC = 3\,cm$ و $AB = 4\,cm$ و $BC = 5\,cm$.

لنثبت أن المثلث ABC قائم الزاوية في A .

لدينا : $BC^2 = 5^2 = 25$ و $AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$

إذن : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

و حسب تطبيق مبرهنة فيتاغورس العكسية فإن : المثلث ABC قائم الزاوية في A .

IV _ المساحات و الحجوم :

/* P_B = محيط القاعدة /* S_B = مساحة القاعدة

/* S_L = المساحة الجانبية /* S_T = المساحة الكلية

المجسم	المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
موشور قائم إرتفاعه h	$S_L = P_B \times h$	$S_T = S_L + 2 \times S_B$	$V = S_B \times h$
أسطوانة قائمة شعاعها R و ارتفاعها h	$S_L = P_B \times h$ أي $S_L = 2R\pi \times h$	$S_T = S_L + 2 \times S_B$ أي $S_T = (2R\pi \times h) + 2(R^2\pi)$	$V = S_B \times h$ أي $V = (R^2\pi) \times h$
هرم إرتفاعه h	مجموع مساحات الأوجه الجانبية	$S_T = S_L + S_B$	$V = \frac{1}{3} S_B \times h$

V _ التكبير و التصغير :

قاعدة :

عند تكبير أو تصغير مجسم بنسبة k فإن :
الأطوال تضرب في العدد k.
و المساحات تضرب في العدد k^2.
و الحجوم تضرب في العدد k^3.

ملاحظة هامة :

إذا كانت k هي نسبة التكبير، فإن نسبة التصغير هي $\frac{1}{k}$